FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER V.

CONTINENS

Sectiones triginta miscellaneas.



LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.

cIↃ IↃc LVII.

AD LECTOREM.

POstquam finem exercitationibus hisce imponere decreveram, diversa mihi alia, Amice Lector, jucundissimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta superesse deprehendi, quæ, si pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hisce adjunxissem, non parùm & meis laboribus ornamenti, & tuis fortè studiis adjumenti commodiqúe attulissent; sed tam labor quam opus in immensum accrevisset. Quocirca cum inter alia, præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & sublimiores quædam Propositiones, partim ab Antiquis, partim à præstantissimis hujus sæculi Mathematicis ingeniosissimè inventæ, ab ipsis investigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præsidio inveniri possint, ostenderim: haud alienum ab instituto judicavi, si, ad uberiorem hujus artis usum, ea, quæ Nobilissimus atque Clarissimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihiqúe conscripta communicavit, hîc unà cum ipsius literis, reliquorum, quæ mihi supersunt, loco, adjicerem.

Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & ſubtiliora & à vulgo remotiora eſſe invenies; præſertim cum ad horum inveſtigationem eâdem mecum Analyſi, cujus olim fundamenta à me edoctus eſt, utatur; atque ita ejus ſtudioſis viam ad conſimiles quæſtiones reſolvendas aperiat. In quibus ſi cum reliquis noſtris laboribus amplam tibi ſatis, Benevole Lector, in hoc ſtudiorum genere exercitationis anſam præbuiſſe videar; animum exinde meum tui ſtudioſiſſimum (ut ſpero) agnoſces, ac noſtram proinde operam in tui & Reïpublicæ Literariæ bonum ſuſceptam in bonam partem interpretaberis. Vale.

CHRI-

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

Cum in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæqúe contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geo-

metras

metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuêre, adeò ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematis pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.



DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad ali-

quid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x - a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x - a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a. Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & pa-

tet

tet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum primus vincat, aut c, si secundus vincat, aut etiam $3x - b - c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd si $3x - b - c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x - b - c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+pq}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum

deponat quisque x, ita ut depositum sit $px + qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p - 1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p - 1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px + qx - bq - ap + a$, tunc enim obtineo $px + qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p - 1$ lusorum, quæ simul conficiunt $ab + pa - a$. Si itaque $qx + bx - bq - ap + a$ æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p - 1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px + qx - bq - ap + a \propto a$, & fit $x \propto \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Vt igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opùs est ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs alter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusus, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depositum est lucretur is, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerũ impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a. Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per 1mam Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquàm alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusus. Oportet hîc facere distributionem.

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lusus & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per 1mam Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea sors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4or lusus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo tres lusus.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrum adhuc duo lusus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi sors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres esse *collusores*, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit *a*. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid *illi*, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur *q*.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C sin-

C ſingulis unus deficeret luſus , ſed ipſi B duo luſus, ac per conſequens ipſi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propoſitionem 8^{vam}. Nunc autem in unam ſummam colligendum eſt, id quod in tribus hiſce caſibus ipſi B deberetur : nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum ſumma eſt $\frac{5}{9}q$. Quod ipſum diviſum per 3, numerum colluſorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipſius B quæſita pars eſt. Demonſtratio autem hujus patet ex 2da Propoſitione. Quoniam enim B æquam habet ſortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2^{dam} Propoſitionem tantundem ac $\frac{c+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, id eſt, $\frac{5}{27}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores caſus primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit priuſquam ille octavæ Propoſitionis calculo ſubductus eſſet, in quo deficientes luſus erant 1, 1, 2, ita etiam cujuſque pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſus ſunt 1 , 2 , 3 , quin primùm calculo ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1 , 2 , 2 , quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo luſus deficientes ſunt 1 , 1 , 3 ; qui ſimiliter per 8^{vam} Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet caſus omnes, qui in ſequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod

Quod ad teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones.

Ad quas ſolvendas advertendum eſt. Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactus diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactus, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactus unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium teſſerarum eſſe 216 jactus diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3^{tia} ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactus eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactus quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta patêre poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactus, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta; vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} ſunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{que} ſunt jactus.

Septem punctorum 6 ſunt jactus.

In tribus teſſeris reperiuntur	3 vel 18	punctorum	1	jactus.
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur a. Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum a, sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2^dam^ Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a. Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^dam^ Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeò ut sors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum *a*; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit *a*; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantùm eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi *a*, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet *a*; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent *a*, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opus est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propositionem, tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille verò quàm primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x, & id quod depositum est vocari a; eritque sors alterius $\propto a-x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse $\propto x$. At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lususque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id èst, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{31y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse $\propto x$. Quocirca erit $\frac{31y}{36} \propto x$, adeoque $y \propto \frac{36x}{31}$. Deinde positùm fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{6a+30x}{36}$. Hoc autem cum sit $\propto y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \propto y$, $\frac{30x+6a}{36} \propto \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \propto \frac{31a}{61}$, valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276. *Probl.* 1.

Probl. 2. Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Probl. 3. A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

Probl. 4. Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis excempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Probl. 5. A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.



Errata quæ irrepsêre Benevolus Lector ſic corrigat.

Pag. 10. lin. 11 omiſſa ſunt hæc verba : *& triploplures aurei quàm ſolidi.* P. 13. l. penult. lege
& 6 poma P. 16 in fine Prop. 26 lege 75 2da *molæ*, & ſupra hoſce numeros ſcribe *modii*. Pag. 25
in margine lege *ad 22 Prop.* P. 26 in fine Prop. 39 lege C. 3520. P. 34 ad ſiniſtram in margine lege
flor. 17017016 (3). P. 45 & 46 in 2 fig. loco ſuperioris literæ D ſcribe B. P. 50. l. 12 lege *& ED,*
DF. P. 52. l. 3 lege *ſub AC, AB.* P. 53. l. 13 lege *& FE.* ibid. loco literæ E, quæ prope I reperitur,
ſcribe F. ibid. l. 14 lege *AGB* &c. P. 55. l. 4 lege *CK;* 26 (I). P. 74. l. 11 lege *Prop. 11ma*. P. 79. l. 4
lege *Vnde LB erit 16.* P. 100. l. 9 lege ABD 27. P. 108 in ſiniſtra duarum ſuperiorum figurarum
literæ M & N ſunt una in alterius locum collocandæ. P. 145 tolle ſuperiùs *Simplicium Problema-*
tum. P. 151. l. 3 lege *quam eſt Crux.* P. 153. l. 7 lege *versùs D.* P. 200. l. ult. ſcribe in margine 3.
Pag. 204. l. 1. Pag. 206. l. 9. Pag. 208. l. penult. P. 211. l. 1. Pag. 213. l. 6. Pag. 215. l. ult. Pag. 218.
l. 1. Pag. 220. l. 17. & Pag. 314. l. 14 lege *in rectam lineam.* Pag. 204. l. 9. Pag. 207. l. 1. Pag. 209.
l. 13. Pag. 211. l. antep. Pag. 214. l. 1. Pag. 216. l. 13. Pag. 218. l. penult. Pag. 221. l. 5 *lege in cir-*
culi circumferentiam. P. 208. l. 3 lege *ſunt.* P. 213. in fig. ad dextram loco ſuperioris literæ C ſcribe
G. P. 220. l. penult. pro BD ſcribe BG. Pag. 221 in fig. inferiori, quæ eſt ad ſiniſtram, omiſſa eſt
lit. I. P. 227. l. 6 lege *Prop. 33.* P. 228. l. penult. lege *in circumferentiam.* P. 245. l. 18 lege *inventum.*
P. 265. l. 11 lege *datam AB.* P. 295. l. 27 lege *deſcriptio.* P. 300. l. 30 lege *in lapideis.* ib. l. antep. lege,
requiſitis. P. 313. l. ult. dele *m.* P. 316. l. 25 lege *ſecans EM.* P. 404. l. 5 lege *Sectione 25.* P. 479.
infra lin. 25 lege $\frac{2g4c}{a}$, & dele lineam ſubductam. P. 488 in fine lege ⊐ BHC.